2)

$$y'(x) = \frac{y(x) + 3x - 5}{4 - x - y(x)}$$

Chci udělat substituci $x = X + A$ a hledat řešení tvaru $y = Y + B$ aby rovnice měla tvar

$$Y'(X) = \frac{\alpha X + \beta Y(X)}{\gamma X + \delta Y(X)}$$

Potřebuju: $B + 3A = 5$

$A + B = 4$

i.e. $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{7}{2}$

$$Y'(X) = [y - B]'(X) = y'(X)$$

dosazením do rovnice

$$Y'(X) = \frac{Y(x) + \frac{7}{2} + 3X + \frac{3}{2} - 5}{4 - Y(x) - \frac{7}{2} - X - \frac{1}{2}} = \frac{Y(X) + 3X}{-Y(x) - X}$$

Tuto rovnice je homogenní, i.e. hledám řešení tvaru $Y(X) = Z(X) \cdot X$

Podmínka $X \neq 0$ z původní rovnice neplyne! I.e. řešení Y může být i slepené z řešení, které nalezneme.

Dosazením:

$$z(x) + z'(x)\cdot x = -\frac{z(x)\cdot x + 3x}{x + z(x)\cdot x}$$

j.e. $$z'(x) = -\frac{z(x) + 3 + z(x) + z^2(x)}{(1 + z(x))x}$$

$$= -\frac{z^2(x) + 2z(x) + 3}{(1 + z(x))} \cdot \frac{1}{x}$$

1. $h(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{x^2 + 2x + 3}{1 + x}$

$D_h = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

2. $g \neq 0$ ag $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

3. $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, \infty)$

4. $$z'(x) \cdot \left(- \frac{1 + z(x)}{z^2(x) + 2z(x) + 3} \right) = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx \hat{=} \log|x|$$

$$\int - \frac{1+x}{x^2+2x+3} \, dx \hat{=} -\frac{1}{2} \log|x^2+2x+3|$$

$$-\frac{1}{2}\log\left|\underbrace{Z^2(x)+2Z(x)+3}_{>0\ !}\right| = \log|x| + c$$

$c\in\mathbb{R}$.

5. $$G(J_i) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\log(2)\right)$$

Pro Z s hodnotami v J_1 dostávám podm.:

$$\log|x| + c < -\frac{1}{2}\log(2)$$

$$|x| < \exp\left(-\frac{1}{2}\log 2 - c\right) = \frac{e^{-c}}{\sqrt{2}}$$

Úpravami rovnice:

$$\underbrace{z^2(x) + 2z(x) + 3}_{(z(x)+1)^2+2} = \exp(-2\log|x| - 2c) = \frac{\exp(-2c)}{x^2}$$

$$z(x) = -\sqrt{\frac{\exp(-2c)}{x^2} - 2} - 1 \quad (*)$$

Řešení jsou $z(x)$ dána $(*)$ def.

na $\left(-\frac{e^{-c}}{\sqrt{2}}, 0\right)$ a na $\left(0, \frac{e^{-c}}{\sqrt{2}}\right)$

Má-li z hodnoty v J_2, dostaneme

řešení

$$z(x) = +\sqrt{\frac{\exp(-2c)}{x^2} - 2} - 1$$

def. na stejných int.

Řešení jsou maximální.

$$Y(x) = Z(x)\cdot x = \pm\sqrt{e^{-2c} - 2x^2} - x \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\text{na } \left(-\frac{e^{-c}}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ a } \left(0, \frac{e^{-c}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\lim_{x \to 0_+} Y(x) = \lim_{x \to 0_-} Y(x) = \pm e^{-c}$$

Dostávám $y(x) = \pm\sqrt{e^{-2c} - 2x^2} - x$, $c \in \mathbb{R}$,

na $\left(-\frac{e^{-c}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-c}}{\sqrt{2}}\right)$

$$y(x) = \pm\sqrt{e^{-2c} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{7}{2},$$

$c \in \mathbb{R}$, $\quad x \in \left(-\frac{e^{-c}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}, \frac{e^{-c}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)$

2) $y' = (y+1)\sqrt{1-y}$

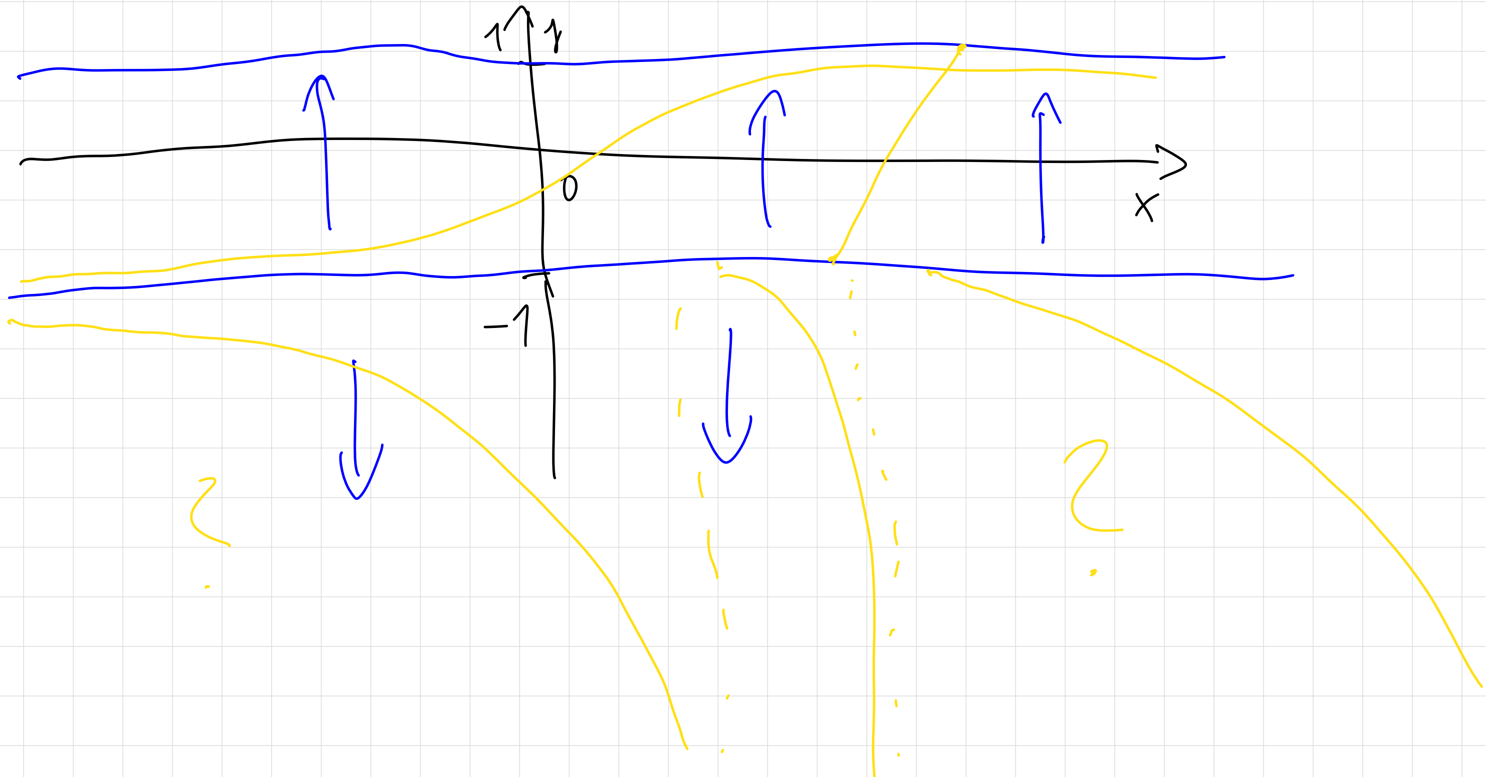
1. $g(x) = (x+1)\sqrt{1-x}$, $D_g = (-\infty, 1]$

i.e. řešení mají hodnoty v $(-\infty, 1]$

2. $g(x) = 0 \iff x = 1, -1$ i.e. mám

dvě stacionární řešení

Označme $J_1 = (-\infty, -1)$, $J_2 = (-1, 1)$



1
y
0
x
-1

Potřebujeme vyšetřit integrál z $\frac{1}{g}$

přes $(-\infty, c)$, $(c, -1)$, $(-1, d)$, $(d, 1)$,

$$c < -1 < d < 1$$

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\, dx \in \mathbb{R},$$ protože

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)\sqrt{1-x}}{-(-x)^{3/2}} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

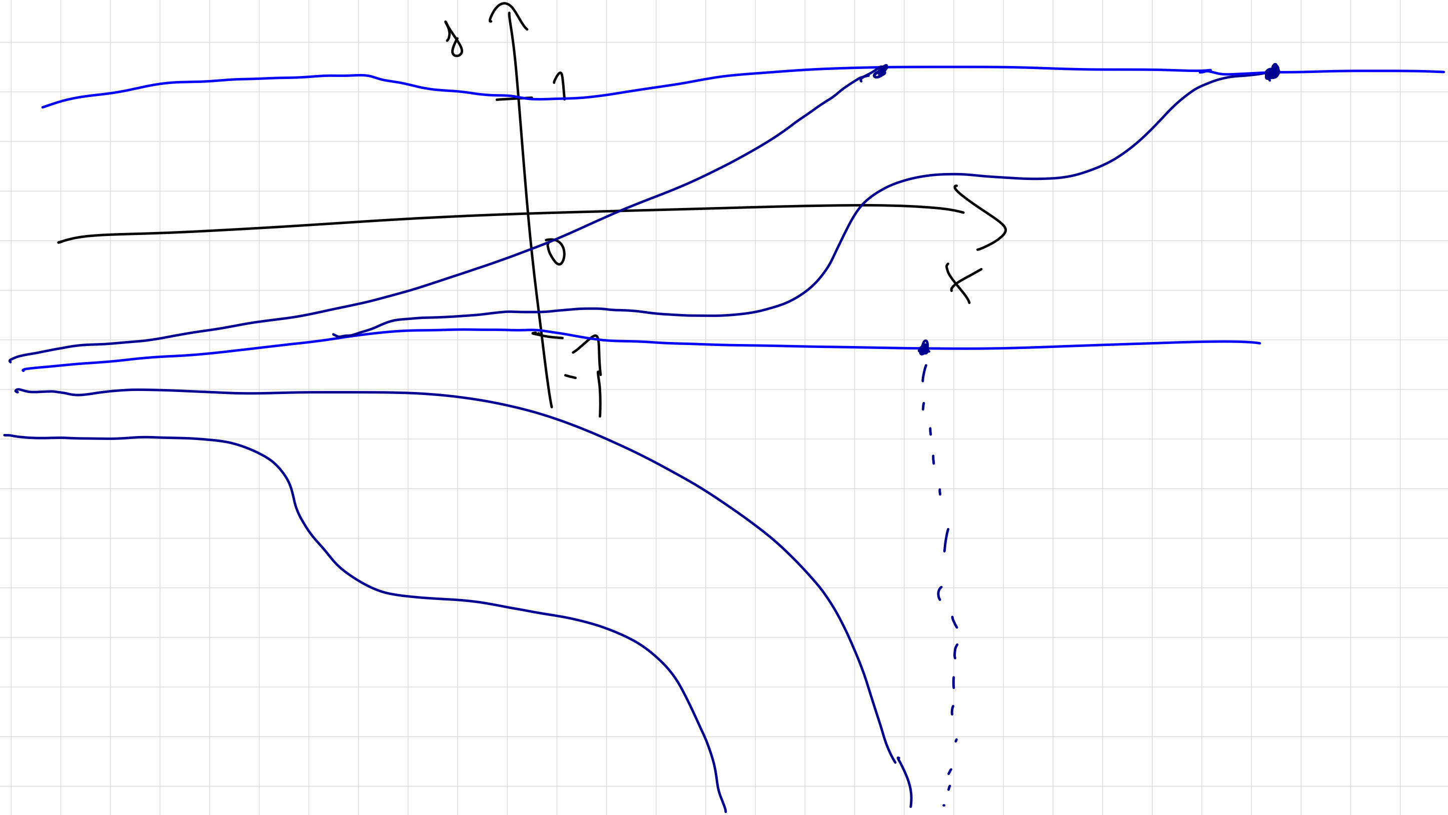
$$\int_c^{-1} \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\,dx = -\infty$$, neboť

$g(-1) = 0$ a $g'(-1)$ ex. vlastní.

$$\int_{-1}^{d} \frac{1}{g(x)}\,dx = +\infty$$ stejně jako výše

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\,dx \in \mathbb{R}, \text{ neboť}$$

$$\lim_{x \to 1_-} \frac{(x+1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} = 2.$$



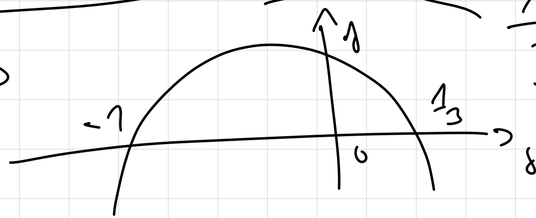
y
1
0
x
-1

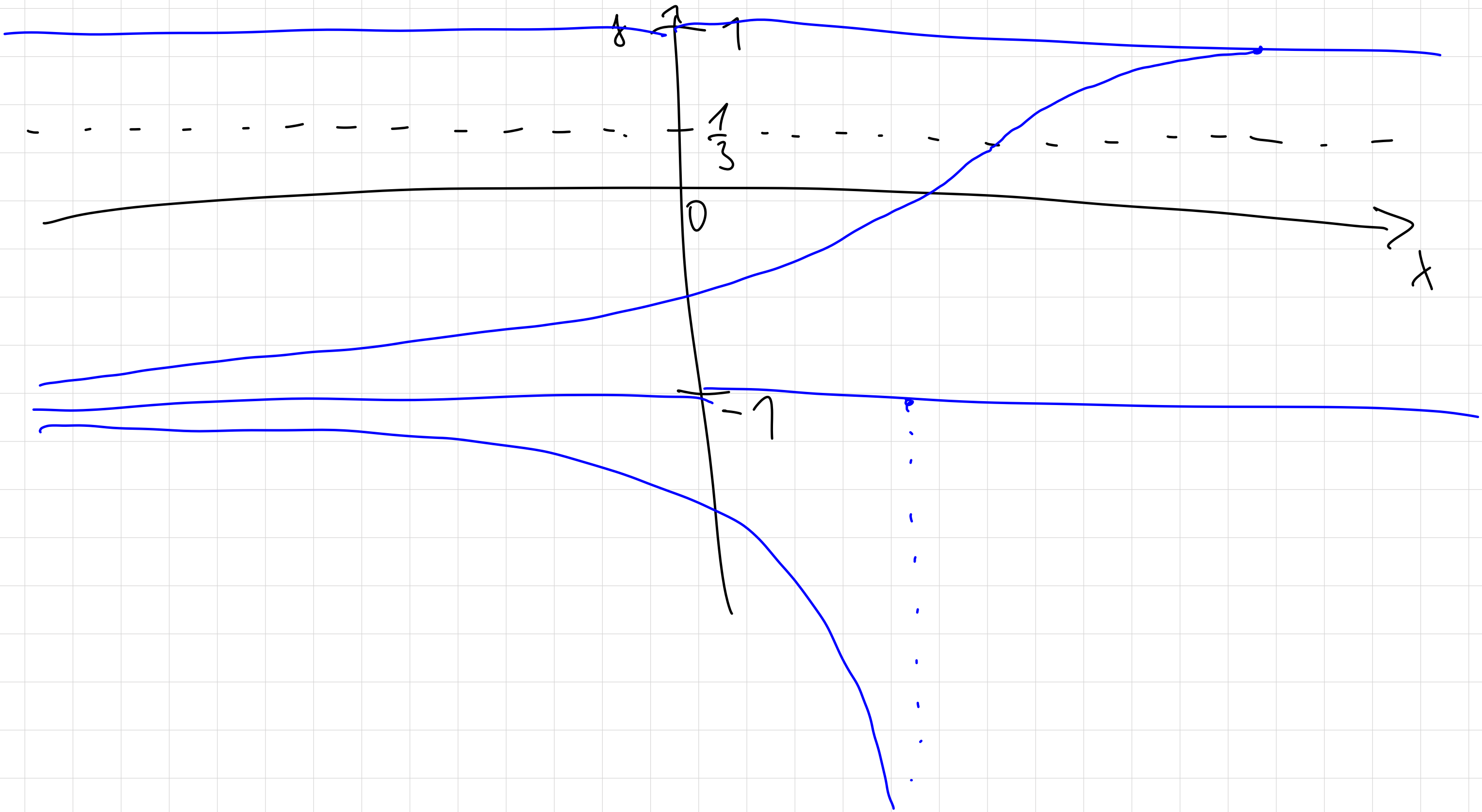
$$y'' = \left((y+1)\sqrt{1-y}\right)' = \sqrt{1-y}\cdot y' + (y+1)\frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{2}(-y') =$$

$$= (y+1)(1-y) - \frac{1}{2}(y+1)^2 = \frac{1}{2} - y - \frac{3}{2}y^2$$

$$= -\left(\frac{3}{2}y^2 + y - \frac{1}{2}\right)$$

Kořeny jsou $\dfrac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$



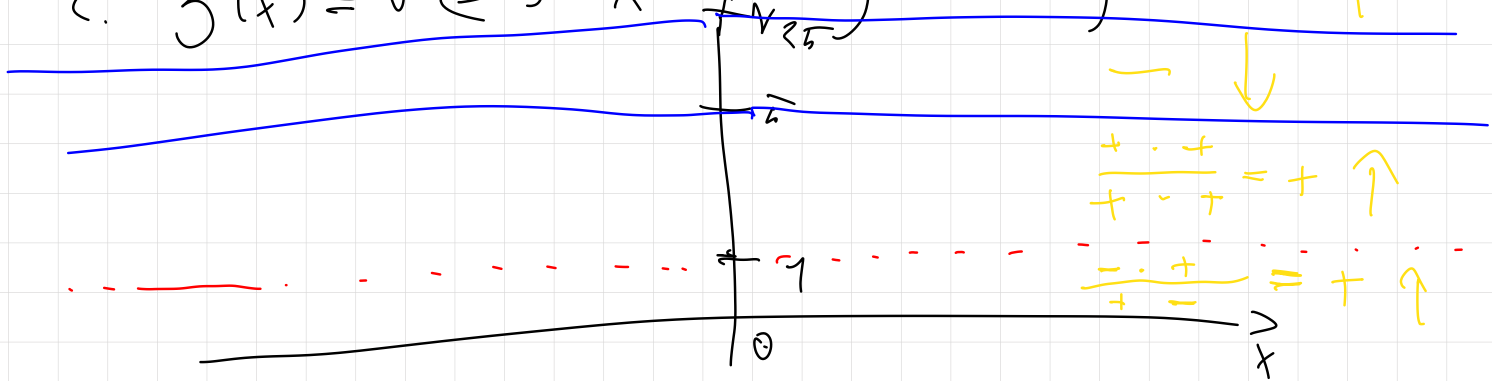


y
1
$\frac{1}{3}$
0
-1
x

3) $g' = \dfrac{(g^2-1)\ \sin(\sin(x))}{g^2 \log(g)}$

1. $D_g = (0,1) \cup (1,\infty)$

2. $g(x) = 0 \iff x = \sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$.



$$\int_0^1 \frac{x^2 \log(x)}{(x^2-1)\sin(\sin(x))}\,dx$$

u 0 konvergnije:

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{\frac{(x^2-1)\sin(\sin(x))}{x^2 \log(x)}}{1} =$$

$$= \lim_{x \to 0_+} (x^2 - 1) \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x \log(x)}$$

AL, VLSF (P), l'H

$$= -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (+\infty) = +\infty > 0.$$

u 1 konvergaje:

$$\lim_{x \to 1_-} g(x) = (x+1) \cdot \frac{1}{x^2} \sin(\sin(x)) \frac{(x-1)}{\log(x)} =$$

AL, VLSF (S)

$$= 2 \cdot 1 \cdot \sin(\sin(1)) \cdot 1 > 0$$

$$\int_1^{\pi} \frac{1}{g(x)}\,dx:$$

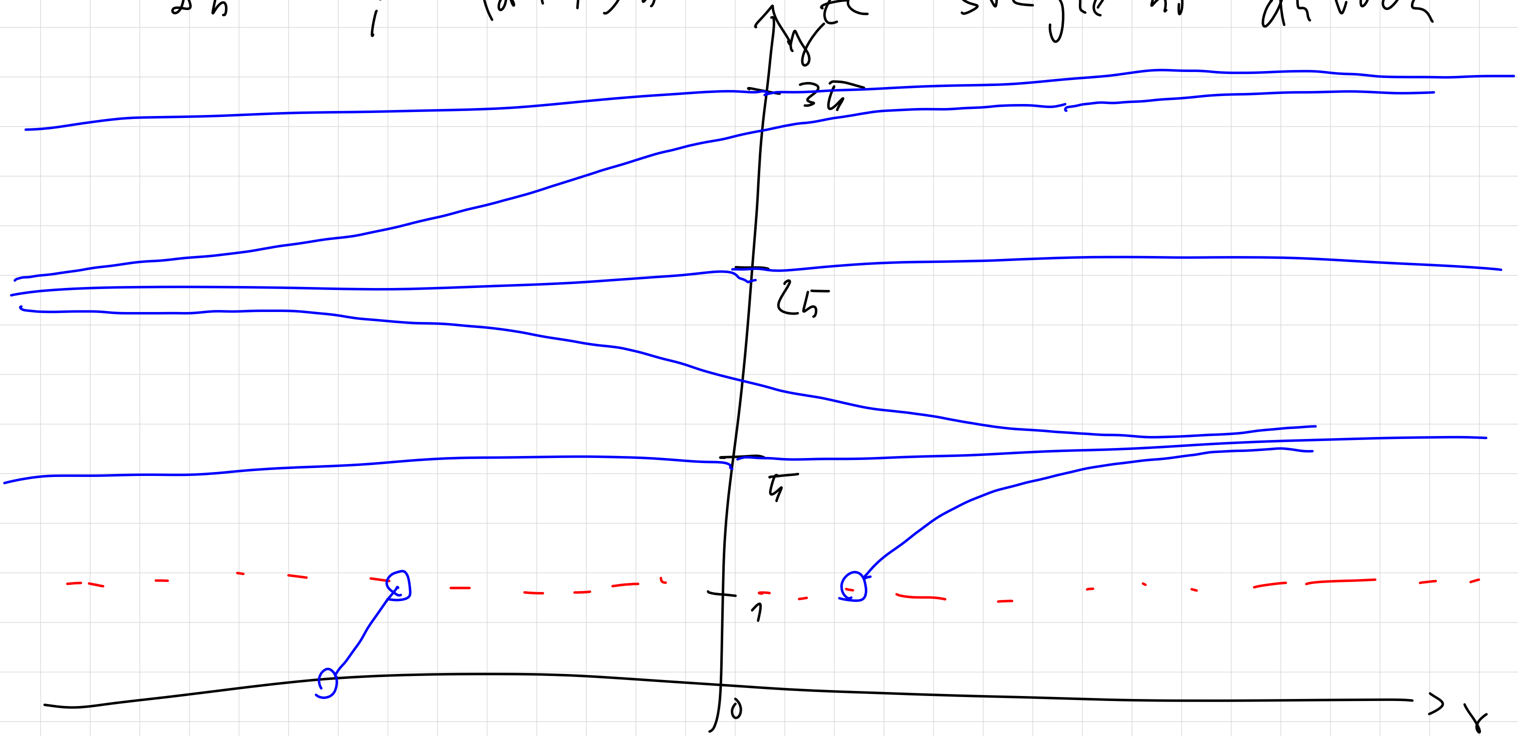
u 1 konverguje jako výše.

u π diverguje, neboť $g(\pi)=0$ a $g'(\pi)$ ex.

vlastní

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{g(x)}\,dx$$; kde $k \in \mathbb{Z}$, $k>1$; diverguje u

kT i $(k+1)T$ ze stejného důvodu



4) $y'(x) + 2x\, y(x) = x e^{-x^2}$, $y(0) = \frac{1}{2}$

1. Oznaczę $p(x) = 2x$, pak $P(x) = x^2 \overset{c}{=} \int p(x)\,dx$

2. $\left(e^{x^2} y(x)\right)' = x$

3. $e^{x^2} y(x) = \frac{x^2}{2} + C$

4. $y(x) = \frac{x^2 e^{-x^2}}{2} + C e^{-x^2}$

Z $y(0) = \frac{1}{2}$ dostáváme $C = \frac{1}{2}$, i.e.

řešení je $y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$